

Chapter VII

CHAPTER – VII
SOME NEW OPERATORS ON INTERVAL FUZZY NUMBERS
AND INTERVAL FUZZY NUMBER MATRICES

Definition : 7.1

Let $\hat{M} = [m_L, m_R]$ and $\hat{N} = [n_L, n_R]$ be two interval fuzzy numbers where $m_L, m_R, n_L, n_R \in [0, 1]$. Then the following operators are defined.

- (1) $\hat{M} \oplus \hat{N} = [m_L + n_L - m_L n_L, m_R + n_R - m_R n_R]$
- (2) $\hat{M} \odot \hat{N} = [m_L n_L, m_R n_R]$
- (3) $\hat{M} \vee \hat{N} = [m_L \vee n_L, m_R \vee n_R]$ where $x \vee y$ means $\max \{x, y\}$. That is, $x \vee y = \max \{x, y\}$.
- (4) $\hat{M} \wedge \hat{N} = [m_L \wedge n_L, m_R \wedge n_R]$ where $x \wedge y$ means $\min \{x, y\}$. That is, $x \wedge y = \min \{x, y\}$.
- (5) $\hat{M} \ominus \hat{N} = [m_L \ominus n_L, m_R \ominus n_R]$ where $x \ominus y = \begin{cases} x, & \text{if } x > y \\ 0, & \text{if } x \leq y \end{cases}$
- (6) $\hat{M} \geq \hat{N}$ if $m_L \geq n_L$ and $m_R \geq n_R$.
- (7) $\hat{M} \pm \hat{N} = [m_L \pm n_L, m_R \pm n_R]$

Definition : 7.2

Let $M = (\hat{M}_{ij})_{m \times n}$ and $N = (\hat{N}_{ij})_{m \times n}$ be two interval fuzzy number matrices of the same order where $\hat{M}_{ij} = [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}]$ and $\hat{N}_{ij} = [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}]$. Then the following operators are defined.

- (1) $M \oplus N = (\hat{M}_{ij} \oplus \hat{N}_{ij})$
- (2) $M \odot N = (\hat{M}_{ij} \odot \hat{N}_{ij})$
- (3) $M \vee N = (\hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij})$
- (4) $M \wedge N = (\hat{M}_{ij} \wedge \hat{N}_{ij})$
- (5) $M \ominus N = (\hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij})$
- (6) $M \geq N$ iff $\hat{M}_{ij} \geq \hat{N}_{ij} \quad \forall i = 1 \text{ to } m, j = 1 \text{ to } n.$

Theorem : 7.3

For any interval fuzzy number matrix M.

- (i) $M \oplus M \geq M$
- (ii) $M \odot M \leq M$

Proof

- (i) The ij^{th} element of $M \oplus M$ is $\hat{M}_{ij} \oplus \hat{M}_{ij}$ which is equal to $[m_{L_{ij}} + m_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} + m_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot m_{R_{ij}}]$

$$\text{consider } m_{L_{ij}} + m_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot m_{L_{ij}} = m_{L_{ij}} + m_{L_{ij}} (1 - m_{L_{ij}}) \geq m_{L_{ij}} \quad (1)$$

$$m_{R_{ij}} + m_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot m_{R_{ij}} = m_{R_{ij}} + m_{R_{ij}} (1 - m_{R_{ij}}) \geq m_{R_{ij}} \quad (2)$$

From (1) and (2), we get that $M \oplus M \geq M$.

- (ii) The ij^{th} element of $M \odot M$ is $\hat{M}_{ij} \odot \hat{M}_{ij}$ which is equal to $[m_{L_{ij}} \cdot m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \cdot m_{R_{ij}}]$. Since, $m_{L_{ij}}^2 \leq m_{L_{ij}}$, $m_{R_{ij}}^2 \leq m_{R_{ij}}$

$$\therefore [m_{L_{ij}}^2, m_{R_{ij}}^2] \text{ which is less than or equal to } [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}].$$

Therefore, $M \odot M \leq M$.

Definition : 7.4

Let $M = (\hat{M}_{ij})$ be an $n \times n$ interval fuzzy number matrix. Then M is

nearly irreflexive iff $\hat{M}_{ii} \leq \hat{M}_{ij}$ for all $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Theorem : 7.5

Let M and N be two interval fuzzy number matrices, then

- (i) $M \oplus N \geq M \odot N$
- (ii) If M and N are nearly irreflexive then $M \oplus N$ and $M \odot N$ are nearly irreflexive.

Proof

Let $M = (\hat{M}_{ij})$ where $\hat{M}_{ij} = [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}]$ and $N = (\hat{N}_{ij})$ where

$$\hat{N}_{ij} = [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}].$$

- (i) The ij^{th} element of $M \oplus N$ is $\hat{M}_{ij} \oplus \hat{N}_{ij}$ which is equal to $[m_{L_{ij}} + n_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} + n_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}}]$ and that of $M \odot N$ is $\hat{M}_{ij} \odot \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}}]$.

$$\begin{aligned} \text{Now consider } m_{L_{ij}} + n_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}} \\ = m_{L_{ij}} \cdot (1 - n_{L_{ij}}) + n_{L_{ij}} \cdot (1 - m_{L_{ij}}) \geq 0 \quad (\text{since } 0 \leq m_{L_{ij}} \leq 1 \\ \text{and } 0 \leq n_{L_{ij}} \leq 1) \end{aligned}$$

$$\therefore m_{L_{ij}} + n_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}} \geq m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}}$$

$$\text{Similarly, } m_{R_{ij}} + n_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}} \geq m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}}$$

Thus, $M \oplus N \geq M \odot N$.

- (ii) Since M and N are nearly irreflexive, $\hat{M}_{ii} \leq \hat{M}_{ij}$ and $\hat{N}_{ii} \leq \hat{N}_{ij}$ for all i, j .

$$\therefore [m_{L_{ii}}, m_{R_{ii}}] \leq [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}]$$

$$\therefore m_{L_{ii}} \leq m_{L_{ij}} \text{ and } m_{R_{ii}} \leq m_{R_{ij}} \quad (1)$$

$$\text{Similarly, } [n_{L_{ii}}, n_{R_{ii}}] \leq [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}]$$

$$\therefore n_{L_{ii}} \leq n_{L_{ij}} \text{ and } n_{R_{ii}} \leq n_{R_{ij}} \quad (2)$$

Let \hat{C}_{ij} and \hat{D}_{ij} be the ij^{th} element of $M \oplus N$ and $M \odot N$ respectively.

$$\begin{aligned} \text{Then } \hat{C}_{ij} - \hat{C}_{ii} &= [m_{L_{ij}} + n_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} + n_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}}] \\ &\quad - [m_{L_{ii}} + n_{L_{ii}} - m_{L_{ii}} \cdot n_{L_{ii}}, m_{R_{ii}} + n_{R_{ii}} - m_{R_{ii}} \cdot n_{R_{ii}}] \\ &= [m_{L_{ij}} + n_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}} - m_{L_{ii}} - n_{L_{ii}} + m_{L_{ii}} \cdot n_{L_{ii}}, \\ &\quad m_{R_{ij}} + n_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}} - m_{R_{ii}} - n_{R_{ii}} + m_{R_{ii}} \cdot n_{R_{ii}}] \\ &= [(1 - m_{L_{ii}}) \cdot (1 - n_{L_{ii}}) - (1 - m_{L_{ij}}) \cdot (1 - n_{L_{ij}}), \\ &\quad (1 - m_{R_{ii}}) \cdot (1 - n_{R_{ii}}) - (1 - m_{R_{ij}}) \cdot (1 - n_{R_{ij}})] \end{aligned}$$

From (1) and (2), we get

$$[(1-m_{L_{ii}}) \cdot (1-n_{L_{ii}}) - (1-m_{L_{ij}}) \cdot (1-n_{L_{ij}})] \geq 0 \text{ as } 1-m_{L_{ii}} \geq 1-m_{L_{ij}} \text{ and } 1-n_{L_{ii}} \geq 1-n_{L_{ij}} \quad (3)$$

$$\text{Similarly, } (1-m_{R_{ii}}) \cdot (1-n_{R_{ii}}) - (1-m_{R_{ij}}) \cdot (1-n_{R_{ij}}) \geq 0 \quad (4)$$

From (3) and (4), we get $\hat{C}_{ij} \geq \hat{C}_{ii}$

Hence, $M \oplus N$ is nearly irreflexive.

Now consider,

$$\begin{aligned} \hat{D}_{ij} - \hat{D}_{ii} &= [m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}}] - [m_{L_{ii}} \cdot n_{L_{ii}}, m_{R_{ii}} \cdot n_{R_{ii}}] \\ &= [m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}} - m_{L_{ii}} \cdot n_{L_{ii}}, m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}} - m_{R_{ii}} \cdot n_{R_{ii}}] \end{aligned}$$

But $m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}} - m_{L_{ii}} \cdot n_{L_{ii}} \geq 0, m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}} - m_{R_{ii}} \cdot n_{R_{ii}} \geq 0$ (By (1))

$$\therefore \hat{D}_{ij} \geq \hat{D}_{ii}$$

Hence, $M \odot N$ is nearly irreflexive.

Theorem : 7.6

Let M, N and Q be three interval fuzzy number matrices. If $M \leq N$, then

$$(1) \quad M \oplus N \leq N \oplus Q$$

$$(2) \quad M \odot Q \leq N \odot Q$$

Proof

Let $M = (\hat{M}_{ij})$ where $\hat{M}_{ij} = [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}]$, $N = (\hat{N}_{ij})$ where $\hat{N}_{ij} = [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}]$ and $Q = (\hat{Q}_{ij})$ where $\hat{Q}_{ij} = [q_{L_{ij}}, q_{R_{ij}}]$.

(1) Let $\hat{D}_{ij}, \hat{E}_{ij}, \hat{F}_{ij}$ and \hat{G}_{ij} be the ij^{th} elements of $M \oplus Q, N \oplus Q, M \odot Q$ and $N \odot Q$ respectively.

But the ij^{th} element of $M \oplus Q$, $N \oplus Q$, $M \odot Q$ and $N \odot Q$ is $\hat{M}_{ij} \oplus \hat{Q}_{ij}$,

$\hat{N}_{ij} \oplus \hat{Q}_{ij}$, $\hat{M}_{ij} \odot \hat{Q}_{ij}$ and $\hat{N}_{ij} \odot \hat{Q}_{ij}$. Then

$$\hat{M}_{ij} \oplus \hat{Q}_{ij} = \hat{D}_{ij} = [m_{L_{ij}} + q_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} + q_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot q_{R_{ij}}]$$

$$\hat{N}_{ij} \oplus \hat{Q}_{ij} = \hat{E}_{ij} = [n_{L_{ij}} + q_{L_{ij}} - n_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}, n_{R_{ij}} + q_{R_{ij}} - n_{R_{ij}} \cdot q_{R_{ij}}]$$

$$\hat{M}_{ij} \odot \hat{Q}_{ij} = \hat{F}_{ij} = [m_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \cdot q_{R_{ij}}]$$

$$\hat{N}_{ij} \odot \hat{Q}_{ij} = \hat{G}_{ij} = [n_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}, n_{R_{ij}} \cdot q_{R_{ij}}]$$

Since $M \leq N$, $m_{L_{ij}} \leq n_{L_{ij}}$.

$$\therefore m_{L_{ij}} (1 - q_{L_{ij}}) \leq n_{L_{ij}} (1 - q_{L_{ij}})$$

$$\therefore m_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}} \leq n_{L_{ij}} - n_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}$$

$$\text{i.e., } m_{L_{ij}} + q_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}} \leq n_{L_{ij}} + q_{L_{ij}} - n_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}$$

Thus, we get

$$[m_{L_{ij}} + q_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} + q_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot q_{R_{ij}}]$$

$$\leq [n_{L_{ij}} + q_{L_{ij}} - n_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}, n_{R_{ij}} + q_{R_{ij}} - n_{R_{ij}} \cdot q_{R_{ij}}]$$

$$\text{i.e., } \hat{D}_{ij} \leq \hat{E}_{ij} \text{ for all } i, j.$$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \oplus \hat{Q}_{ij} \leq \hat{N}_{ij} \oplus \hat{Q}_{ij} \text{ for all } i, j.$$

Hence, $M \oplus Q \leq N \oplus Q$.

$$(2) \quad \text{Also } [m_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \cdot q_{R_{ij}}] \leq [n_{L_{ij}} \cdot q_{L_{ij}}, n_{R_{ij}} \cdot q_{R_{ij}}]$$

$$\text{i.e., } \hat{F}_{ij} \leq \hat{G}_{ij} \text{ for all } i, j.$$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \odot \hat{Q}_{ij} \leq \hat{N}_{ij} \odot \hat{Q}_{ij} \quad \forall i, j.$$

Hence, $M \odot Q \leq N \odot Q$.

Theorem : 7.7

For any two interval fuzzy number matrices M and N ,

- (a) $M \oplus N \geq M \vee N \geq M \ominus N$
- (b) $(M \vee N) \vee (M \ominus N) = M \vee N$
- (c) $(M \vee N) \ominus (M \ominus N) \leq N$

$$(d) \quad M \oplus N \geq (M \vee N) \vee (M \ominus N)$$

$$(e) \quad M \oplus N \geq (M \vee N) \ominus (M \ominus N)$$

Proof

$$(a) \quad M \oplus N \geq M \vee N \geq M \ominus N$$

Let \hat{C}_{ij} , \hat{D}_{ij} and \hat{E}_{ij} be the ij^{th} elements of $M \oplus N$, $M \vee N$ and $M \ominus N$ respectively. But the ij^{th} elements of $M \oplus N$, $M \vee N$ and $M \ominus N$ are

$$\begin{aligned} & \hat{M}_{ij} \oplus \hat{N}_{ij}, \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} \text{ and } \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij}. \text{ Then } \hat{M}_{ij} \oplus \hat{N}_{ij} = \hat{C}_{ij} \\ & = [m_{L_{ij}} + n_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} + n_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}}] \\ & = \begin{cases} [m_{L_{ij}} + n_{L_{ij}} (1 - m_{L_{ij}}), m_{R_{ij}} + n_{R_{ij}} (1 - m_{R_{ij}})] \\ \geq [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] \\ \geq \hat{M}_{ij} \\ [n_{L_{ij}} + m_{L_{ij}} (1 - n_{L_{ij}}), n_{R_{ij}} + m_{R_{ij}} (1 - n_{R_{ij}})] \\ \geq [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}] \\ \geq \hat{N}_{ij} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} & = \hat{D}_{ij} = \max \{ \hat{M}_{ij}, \hat{N}_{ij} \} \\ & \leq [m_{L_{ij}} + n_{L_{ij}} - m_{L_{ij}} \cdot n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} + n_{R_{ij}} - m_{R_{ij}} \cdot n_{R_{ij}}] \\ & = \hat{C}_{ij} \text{ (from (1))} \end{aligned}$$

Thus, $\hat{C}_{ij} \geq \hat{D}_{ij}$ for all i, j .

$$\text{i.e., } \hat{M}_{ij} \oplus \hat{N}_{ij} \geq \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} \quad \forall i, j.$$

$$\text{Hence, } M \oplus N \geq M \vee N \quad (2)$$

Now consider

$$\hat{E}_{ij} = \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}} \ominus n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \ominus n_{R_{ij}}]$$

$$\text{where } m_{L_{ij}} \ominus n_{L_{ij}} = \begin{cases} m_{L_{ij}}, & m_{L_{ij}} > n_{L_{ij}} \\ 0, & m_{L_{ij}} \leq n_{L_{ij}} \end{cases}$$

$$\text{i.e., } m_{L_{ij}} \ominus n_{L_{ij}} \leq m_{L_{ij}} \leq \max \{m_{L_{ij}}, n_{L_{ij}}\}$$

$$m_{R_{ij}} \ominus n_{R_{ij}} \leq m_{R_{ij}} \leq \max \{m_{R_{ij}}, n_{R_{ij}}\}$$

$$\therefore \hat{E}_{ij} \leq \max \{[m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}], [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}]\}$$

$$\leq \max \{\hat{M}_{ij}, \hat{N}_{ij}\}$$

$$\leq \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij}$$

$$\text{Thus, } M \ominus N \leq M \vee N$$

From (2) and (3), we get $M \oplus N \geq M \vee N \geq M \ominus N$.

Let \hat{D}_{ij} , \hat{E}_{ij} and \hat{H}_{ij} be the ij^{th} elements of $M \vee N$, $M \ominus N$ and $(M \vee N) \vee (M \ominus N)$ respectively. But the ij^{th} elements of $M \vee N$, $M \ominus N$ and $(M \vee N) \vee (M \ominus N)$ is $\hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij}$, $\hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij}$ and $(\hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij}) \vee (\hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij})$.

$$\text{Then } \hat{D}_{ij} = \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}} \vee n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \vee n_{R_{ij}}]$$

$$\text{where } m_{L_{ij}} \vee n_{L_{ij}} = \max \{m_{L_{ij}}, n_{L_{ij}}\}$$

$$\hat{E}_{ij} = \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}} \ominus n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \ominus n_{R_{ij}}]$$

$$\text{where } m_{L_{ij}} \ominus n_{L_{ij}} = \begin{cases} m_{L_{ij}}, & m_{L_{ij}} > n_{L_{ij}} \\ 0, & m_{L_{ij}} \leq n_{L_{ij}} \end{cases}$$

$$\text{(b) } (M \vee N) \vee (M \ominus N) = M \vee N$$

Case (i) : $m_{L_{ij}} > n_{L_{ij}}$, $m_{R_{ij}} > n_{R_{ij}}$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] \text{ and } \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}].$$

$$\text{Then } \hat{H}_{ij} = [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] \vee [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}]$$

$$= [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}]$$

$$= \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij}$$

$$\therefore \hat{H}_{ij} = \hat{D}_{ij}$$

Case (ii) : $m_{L_{ij}} > n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \leq n_{R_{ij}}$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}}, 0] \text{ and } \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}].$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \hat{H}_{ij} &= [m_{L_{ij}}, 0] \vee [m_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}] \\ &= [m_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}] \\ &= \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} \\ \therefore \hat{H}_{ij} &= \hat{D}_{ij} \end{aligned}$$

Case (iii) : $m_{L_{ij}} \leq n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} > n_{R_{ij}}$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [0, m_{R_{ij}}] \text{ and } \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = [n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}].$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \hat{H}_{ij} &= [0, m_{R_{ij}}] \vee [n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] \\ &= [n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] \\ &= \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} \\ &= \hat{D}_{ij} \end{aligned}$$

Case (iv) : $m_{L_{ij}} \leq n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \leq n_{R_{ij}}$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [0, 0] \text{ and } \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}].$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \hat{H}_{ij} &= [0, 0] \vee [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}] \\ &= [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}] \\ &= \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} \\ &= \hat{D}_{ij} \\ \therefore \hat{H}_{ij} &= \hat{D}_{ij} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{In all cases, } \hat{D}_{ij} = \hat{H}_{ij}.$$

$$\text{i.e., } \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = (\hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij}) \vee (\hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij})$$

$$\text{Hence } M \vee N = (M \vee N) \vee (M \ominus N).$$

$$(c) \quad (M \vee N) \ominus (M \ominus N) \leq N$$

Let \hat{F}_{ij} be the ij^{th} elements of $(M \vee N) \ominus (M \ominus N)$. But the ij^{th} element of

$$(M \vee N) \ominus (M \ominus N) \text{ is } (\hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij}) \ominus (\hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij}).$$

$$\text{Case (i) : } m_{L_{ij}} > n_{L_{ij}}, \quad m_{R_{ij}} > n_{R_{ij}}$$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] \text{ and } \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}].$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \hat{F}_{ij} &= [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] \ominus [m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] \\ &= [m_{L_{ij}} \ominus m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \ominus m_{R_{ij}}] \\ &= [0, 0] \end{aligned}$$

$$\text{Case (ii) : } m_{L_{ij}} \leq n_{L_{ij}}, \quad m_{R_{ij}} > n_{R_{ij}}$$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [0, m_{R_{ij}}] \text{ and } \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = [n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}].$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \hat{F}_{ij} &= [0, m_{R_{ij}}] \ominus [n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] \\ &= [0 \ominus n_{L_{ij}}, m_{R_{ij}} \ominus m_{R_{ij}}] \\ &= [n_{L_{ij}}, 0]. \end{aligned}$$

$$\text{Case (iii) : } m_{L_{ij}} > n_{L_{ij}}, \quad m_{R_{ij}} \leq n_{R_{ij}}$$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}}, 0] \text{ and } \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = [m_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}].$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \hat{F}_{ij} &= [m_{L_{ij}}, 0] \ominus [m_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}] \\ &= [m_{L_{ij}} \ominus m_{L_{ij}}, 0 \ominus n_{R_{ij}}] \\ &= [0, n_{R_{ij}}] \end{aligned}$$

$$\text{Case (iv) : } m_{L_{ij}} \leq n_{L_{ij}}, \quad m_{R_{ij}} \leq n_{R_{ij}}$$

$$\therefore \hat{M}_{ij} \ominus \hat{N}_{ij} = [0, 0] \text{ and } \hat{M}_{ij} \vee \hat{N}_{ij} = [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}].$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \hat{F}_{ij} &= [0, 0] \ominus [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}] \\ &= [0 \ominus n_{L_{ij}}, 0 \ominus n_{R_{ij}}] \\ &= [n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}] \\ &= \hat{N}_{ij} \end{aligned}$$

From case (i) to case (iv), we see that the ij^{th} element of \hat{F}_{ij} is either 0 or \hat{N}_{ij} according as $[m_{L_{ij}}, m_{R_{ij}}] >$ or \leq to $[n_{L_{ij}}, n_{R_{ij}}]$.

Thus, $(M \vee N) \ominus (M \ominus N) \leq N$

(d) $M \oplus N \geq (M \vee N) \vee (M \ominus N)$

$$(M \vee N) \vee (M \ominus N) = M \vee N \leq M \oplus N \text{ (By (a))}$$

Hence, $M \oplus N \geq (M \vee N) \vee (M \ominus N)$.

(e) $M \oplus N \geq (M \vee N) \ominus (M \ominus N)$

It is obvious that $N \leq M \vee N$

$$\therefore (M \vee N) \ominus (M \ominus N) \leq N \text{ (by (c))}$$

$$\leq M \vee N$$

$$\leq M \oplus N$$

Hence, $M \oplus N \geq (M \vee N) \ominus (M \ominus N)$.